CONCOURS 1986

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Les trois parties du problème sont indépendantes.*

Dans les parties I et II le plan affine euclidien orienté (P) *est rapporté à un repère orthonormal de sens direct* $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. *Un point du plan sera repéré par ses coordonnées cartésiennes* (x, y) *ou par ses coordonnées polaires* (ρ, θ). *Dans la partie III l'espace affine euclidien orienté de dimension trois* (E) *est rapporté à un repère orthonormal de sens direct* $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Un point de l'espace sera repéré par ses coordonnées cartésiennes* (x, y, z) *ou par ses coordonnées semi-polaires* (ρ, θ, z).

On appelle spirale logarithmique de pôle O une courbe plane d'équation polaire $\rho = \rho_0 e^{m\theta}$ où ρ_0 et m sont deux paramètres réels non nuls. Construire cette courbe.

I

Dans cette partie t désigne le temps ($t \in [0, +\infty[$). Un point M du plan (P) est mobile sur la spirale logarithmique (Σ) d'équation polaire $\rho = \rho_0 e^{m\theta}$ ($\rho_0 > 0$; $m > 0$) avec un mouvement à accélération centrale de centre O. Les conditions initiales sont : $t = 0$; $\theta_0 = 0$; $\vec{V}_0 = \frac{\rho_0}{2m}(m\vec{i} + \vec{j})$ (vecteur vitesse).

1° Déterminer la loi horaire du mouvement (c'est-à-dire θ en fonction de t).

2° Calculer la vitesse aréolaire $\left(\text{c'est-à-dire la constante } \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right)$.

3° Préciser si le mouvement est accéléré ou retardé.

4° Montrer que l'hodographe du mouvement relatif au point O (lieu des points P tels que $\overrightarrow{OP} = \vec{V}$ vecteur vitesse du point M) est inclus dans une courbe qui se déduit de la spirale (Σ) par une transformation géométrique que l'on déterminera.

II

Définition préliminaire : $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont des applications de classe C^k d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ($k \geqslant 3$) définissant des représentations paramétriques de deux arcs plans (Γ_1) et (Γ_2) orientés, sans point stationnaire, passant par un même point M_0. On dit que (Γ_1) et (Γ_2) sont surosculateurs en M_0 de paramètre t_0 si : $\vec{F}_1(t_0) = \vec{F}_2(t_0)$ et $(\forall i \in \mathbb{N})$ $(1 \leqslant i \leqslant 3 \Rightarrow \vec{F}_1^{(i)}(t_0) = \vec{F}_2^{(i)}(t_0))$.

(C) désigne un arc du plan (P) orienté de classe C^k ($k \geqslant 4$) sans point stationnaire. On choisit une abscisse curviligne s sur (C) et en tout point M de (C) on définit le repère de Frenet : $(M ; \vec{t}, \vec{n})$. φ désigne une mesure à 2π près de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{t}})$, R est le rayon de courbure en M à (C), $R' = \frac{dR}{ds}$. On suppose $R \neq 0$ et $R' \neq 0$.

On se propose de montrer qu'en tout point de (C) il y a une spirale logarithmique surosculatrice.

Tournez la page S. V. P.

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille
.Math 2
1986
page 147

1° Dans cette question, on suppose que (C) passe par O, que sa tangente en O est $(O ; \vec{i})$ orientée par $\vec{i}$, que (C) est orienté dans le sens des x croissant et que O est origine des abscisses curvilignes. On utilise s comme paramètre.

a. Écrire un développement limité de x et y, coordonnées d'un point M de (C), au voisinage de 0 à l'ordre 3 suivant les puissances croissantes de s (les coefficients de ces développements limités feront apparaître R rayon de courbure en O et R').

b. Soit O_1 le point du plan de coordonnées $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On considère une spirale logarithmique (Σ) de pôle O_1 et d'équation polaire $\rho = \rho_0 e^{m\theta}$ ($\rho_0 \neq 0$ et $m \neq 0$) dans le repère d'origine O_1 et d'axe polaire dirigé par $\vec{i}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante liant m, a et b pour qu'il existe au moins une spirale (Σ) passant par O et tangente en O à $(O ; \vec{i})$.

c. Prouver qu'il existe un unique point O_1 du plan (P) pôle d'une spirale logarithmique surosculatrice en O à (C). (On montrera que les coordonnées a et b de O_1 sont de la forme $a = \alpha \dfrac{RR'}{1 + R'^2}$ et $b = \beta \dfrac{R}{1 + R'^2}$ où α et β sont deux constantes réelles que l'on déterminera.)

2° On se place maintenant dans le cas général : M est un point quelconque de (C).

Prouver qu'il existe un unique point M_1 du plan (P) qui soit pôle d'une spirale logarithmique surosculatrice en M à (C).

Écrire les coordonnées x_1 et y_1 de M_1 en fonction des coordonnées x et y de M, du rayon de courbure R en M à (C) de R' et de l'angle φ.

Lorsque M décrit la courbe (C), M_1 décrit une courbe (C_1).

3° Les notations sont celles de la question précédente. On pose :

$$\omega = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

a. Écrire un système d'équations permettant d'exprimer $x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi$ d'une part, $-x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi$ d'autre part, en fonction de ω, $\dot{\omega}$, R et R'.

b. En déduire $\dfrac{ds_1}{d\varphi}$ où s_1 désigne une abscisse curviligne sur (C_1) orientée.

c. Calculer le rayon de courbure R_1 en M_1 à (C_1) en fonction de R, R' et R'' (on pourra introduire dans les calculs intermédiaires un angle $\delta \in]0, \pi[$ défini par $\operatorname{cotg} \delta = -R'$).

III

Dans l'espace (E) on donne un cône de révolution d'axe $(O ; \vec{k})$, de sommet O, de demi-angle au sommet $\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. On appelle génératrice du cône une droite passant par O et tracée sur le cône.

1° Trouver les courbes tracées sur le cône, de classe C^1, sans point stationnaire, qui font avec les génératrices de celui-ci un angle constant $\varphi \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On déterminera les courbes cherchées par leurs équations en coordonnées semi-polaires.

2° Vérifier que chacune des courbes définies dans III.1° a pour projection sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ une spirale logarithmique.

Dans la suite, on note (Γ) une courbe de la famille ci-dessus dont la projection sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ a pour équation polaire $\rho = \rho_0 e^{m\theta}$ avec $\rho_0 > 0$, $m > 0$. Calculer m en fonction de l'angle φ et de l'angle α.

3° Montrer que la tangente à une courbe (Γ) en un point M de celle-ci fait avec l'axe $(O ; \vec{k})$ un angle indépendant de M.

4° Trouver le rayon de courbure et le rayon de torsion en un point M d'une courbe (Γ) [on exprimera ces rayons en fonction de ρ_0, θ, φ, α et m.)

5° Prouver que la projection sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de la développée d'une courbe (Γ) est encore une spirale logarithmique (on rappelle que la développée d'une courbe est le lieu de son centre de courbure).